Übungsstunde 13

Resolutionskalkül

1. (Lemma 6.3. anwenden)
2. Formeln in CNF bringen $(L_{11} \vee L_{12} \vee ..) \wedge (L_{21} \vee L_{22} \vee ..) \wedge ..$
3. Resolutionskalkül auf Menge anwenden und leere Menge herleiten

Lemma 6.2. *A formula F is a tautology if and only if $\neg F$ is unsatisfiable.*

Lemma 6.3. *The following three statements are equivalent:*

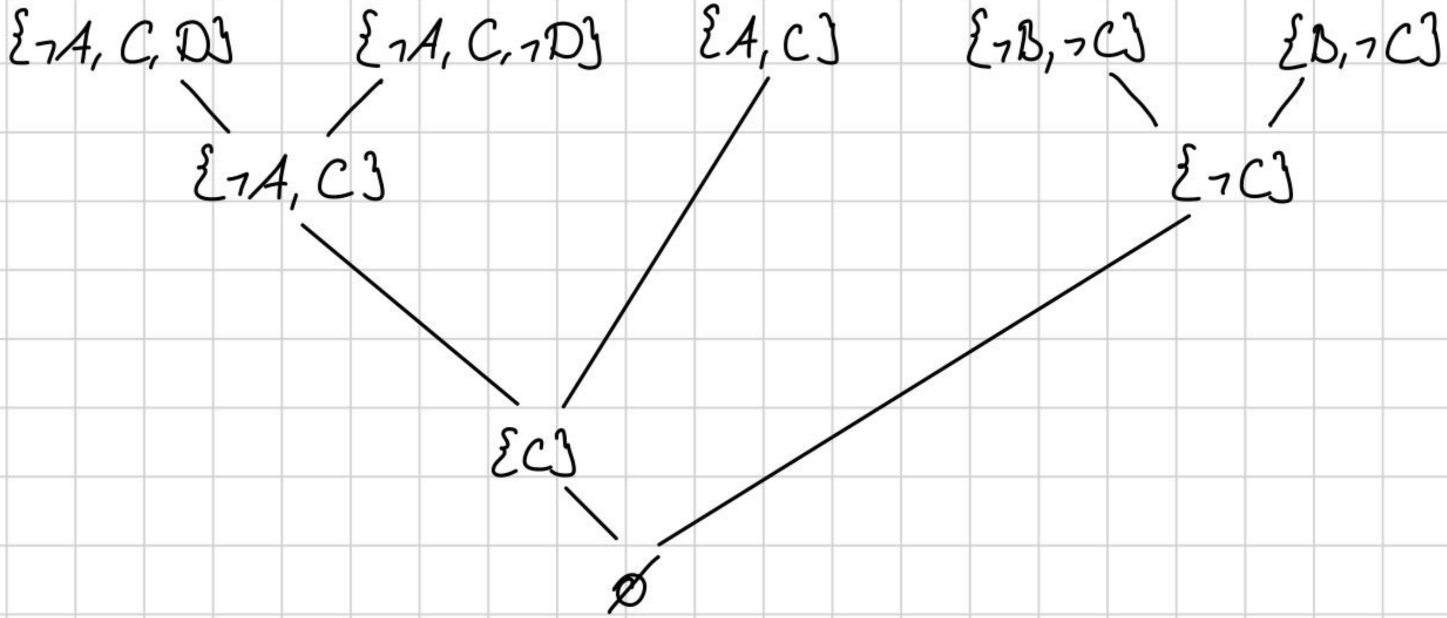
1. $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\} \models G$,
2. $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k) \rightarrow G$ *is a tautology,*
3. $\{F_1, F_2, \ldots, F_k, \neg G\}$ *is unsatisfiable.*

Resolutionskalkül

Wir können mit dem Resolutionskalkül zeigen, dass eine Formel in CNF unerfüllbar ist.

Beispiel: $F = (\neg A \lor C \lor D) \land (A \lor C) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg A \lor C \lor \neg D) \land (B \lor \neg C)$

$\to \{\neg A, C, D\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A, C, \neg D\}, \{B, \neg C\}$



Aufgabe

(*) Beweisen Sie mit Hilfe von Resolution, dass die Formel

$$F = (\neg B \land \neg D) \lor (\neg A \land C) \lor (B \land \neg A \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg D) \lor (D)$$

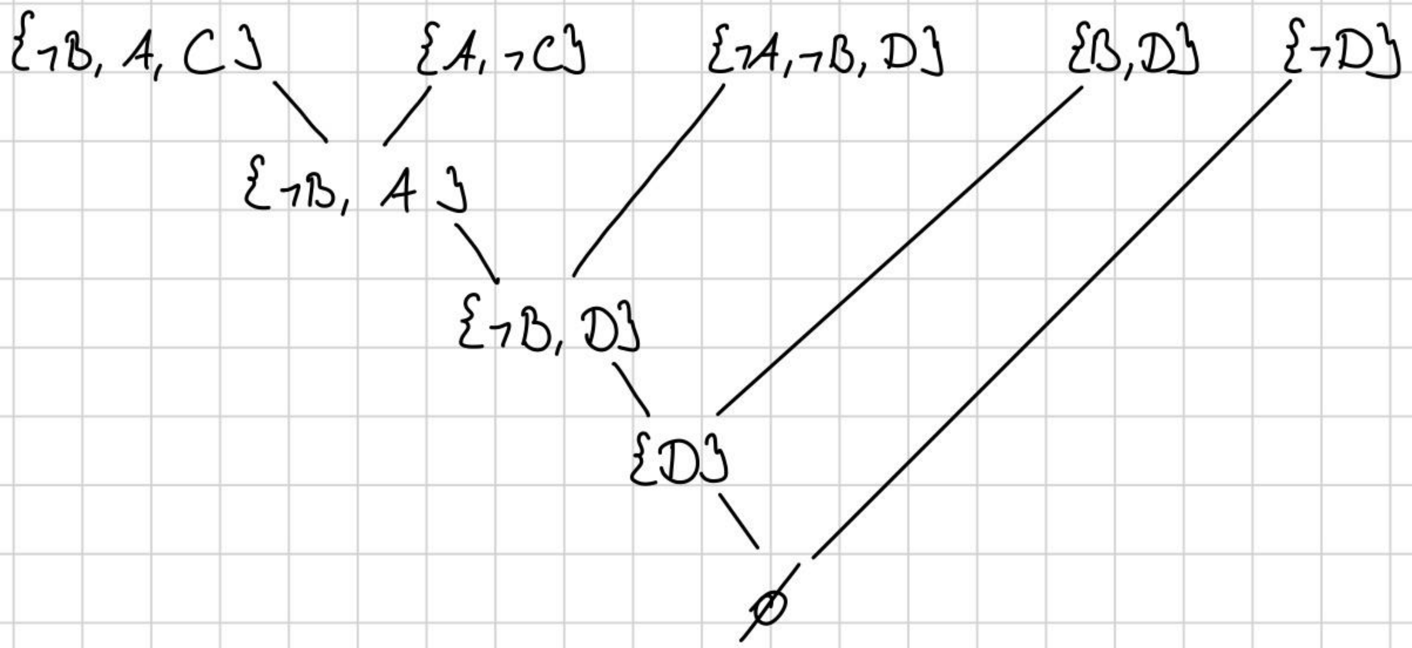
eine Tautologie ist. *(5 Punkte)*

Aufgabe

Nach Lemma 6.2. ist F eine Tautologie genau dann wenn $\neg F$ unerfüllbar. Wir zeigen also mit dem Resolutionskalkül, dass $\neg F$ unerfüllbar

$$
\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg((\neg B \land \neg D) \lor (\neg A \land C) \lor (B \land \neg A \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg D) \lor (D)) \\
&\equiv \neg(\neg B \land \neg D) \land \neg(\neg A \land C) \land \neg(B \land \neg A \land \neg C) \land \neg(A \land B \land \neg D) \land \neg(D) && \text{(de Morgan)} \\
&\equiv (B \lor D) \land (A \lor \neg C) \land (\neg B \lor A \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor D) \land (\neg D) && \text{(de Morgan, double negation)}
\end{aligned}
$$

Die Klauseln sind also: $\{B, D\}, \{A, \neg C\}, \{\neg B, A, C\}, \{\neg A, \neg B, D\}, \{\neg D\}$



Prenex Normalform

- Alle Quantoren am Anfang (ohne Negationen) und danach eine Formel ohne Quatoren
- Beispiel: $\forall x \exists y \forall z\ ((P(x, y) \vee Q(f(a), z)) \wedge \neg\big(Q(z, y)\big))$

Aufgabe

Finde eine Formel in PNF äquivalent zu:

$$\neg\forall x\big(P(x) \vee \neg Q(y)\big) \wedge \exists y(P(x) \vee Q(y))$$

Lemma 6.7. *For any formulas F, G, and H, where x does not occur free in H, we have*

1) $\neg(\forall x\ F) \equiv \exists x\ \neg F$;
2) $\neg(\exists x\ F) \equiv \forall x\ \neg F$;
3) $(\forall x\ F) \wedge (\forall x\ G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$;
4) $(\exists x\ F) \vee (\exists x\ G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$;
5) $\forall x\ \forall y\ F \equiv \forall y\ \forall x\ F$;
6) $\exists x\ \exists y\ F \equiv \exists y\ \exists x\ F$;
7) $(\forall x\ F) \wedge H \equiv \forall x\ (F \wedge H)$;
8) $(\forall x\ F) \vee H \equiv \forall x\ (F \vee H)$;
9) $(\exists x\ F) \wedge H \equiv \exists x\ (F \wedge H)$;
10) $(\exists x\ F) \vee H \equiv \exists x\ (F \vee H)$.

Lemma 6.9. *For a formula G in which y does not occur, we have*

- $\forall x\ G \equiv \forall y\ G[x/y]$,
- $\exists x\ G \equiv \exists y\ G[x/y]$.

Aufgabe

$$\neg \forall x \, (P(x) \lor \neg Q(\underline{y})) \land \exists y \, (P(\underline{x}) \lor Q(y))$$

_ freie Variablen

$$\equiv \neg \forall a \, (P(a) \lor \neg Q(y)) \land \exists b \, (P(x) \lor Q(b))$$ (Lemma 6.9.)

$$\equiv (\exists a \, \neg (P(a) \lor \neg Q(y))) \land \exists b \, (P(x) \lor Q(b))$$ (Lemma 6.7.1)

$$\equiv \exists a \, (\neg (P(a) \lor \neg Q(y)) \land \exists b \, (P(x) \lor Q(b)))$$ (Lemma 6.7.9)

$$\equiv \exists a \, (\exists b \, (P(x) \lor Q(b)) \land \neg (P(a) \lor \neg Q(y)))$$ (comm. of $\land$)

$$\equiv \exists a \, \exists b \, ((P(x) \lor Q(b)) \land \neg (P(a) \lor \neg Q(y)))$$ (Lemma 6.7.9)

Aufgabe

12.5 A New Operator $\heartsuit$ ($\star$) *(8 Points)*

We extend predicate logic by a new operator $\heartsuit$ as follows:

Syntax: If F and G are formulas, then $(F \heartsuit G)$ is a formula.

Semantics: $\mathcal{A}((F \heartsuit G)) = 1$ if and only if $\mathcal{A}(F) = 0$ and $\mathcal{A}(G) = 1$.

Prove or disprove each of the following statements. Do not use any theorems or lemmas from the lecture notes. Note that x may appear free in F, G or both.

a) For any formulas F and G, we have

$$\forall x\, (F \heartsuit G) \models (\forall x F) \heartsuit (\forall x G).$$

Aufgabe

Sei $\mathcal{A}$ eine passende Interpretation für $\forall x(F \heartsuit G)$ und $(\forall x F) \heartsuit (\forall x G)$ und sei $\mathcal{A}(\forall x(F \heartsuit G)) = 1$.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}(\forall x(F \heartsuit G)) = 1 \\
\Rightarrow\ & \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(F \heartsuit G) = 1 \text{ for all } u \in U^{\mathcal{A}} && (\text{sem. of } \forall) \\
\Rightarrow\ & \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(F) = 0 \text{ and } \mathcal{A}_{[x \mapsto u]}(G) = 1 \text{ for all } u \in U^{\mathcal{A}} && (\text{sem. of } \heartsuit) \\
\Rightarrow\ & \mathcal{A}(\forall x F) = 0 \text{ and } \mathcal{A}(\forall x G) = 1 \text{ for all } u \in U^{\mathcal{A}} && (\text{sem. of } \forall) \\
\Rightarrow\ & \mathcal{A}((\forall x F) \heartsuit (\forall x G)) = 1 && (\text{sem. of } \heartsuit)
\end{aligned}
$$